Licence Mathématiques
Intégration de Lebesgue et calcul différentiel

Responsable	Descriptions	Informations
	Code : SMI6U30	Composante : Faculté des Sciences
	Nature : Unité d'enseignement	
	Domaines : Sciences et Technologies	

LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

CONTENU

- (6 semaines soit 12h CM, 18h TD) On discute de la notion de mesure, on admet l'existence de la mesure de Lebesgue, on montre comment construire l'intégrale de Lebesgue de fonctions définies sur ℝ, puis on étudie ses propriétés et notamment les théorèmes de convergence.

    1. Introduction à la notion de mesure sur ℝ : si A ⊂ℝ, on veut définir la "taille" de A ou la "mesure" de A, notée μ(A). On voudrait que certaines propriétés soient vérifiées :

        1. on souhaiterait que la mesure soit additive : si A et B sont des parties disjointes de ℝ, on voudrait μ(A∪B) = μ(A)+μ(B).

        2. on souhaiterait que cette mesure soit invariante par translation : si A ⊂ℝ et t ∈ℝ, on voudrait μ(A+t) = μ(A).

        On peut éventuellement rajouter que la mesure est σ-additive, ce qui permet de rendre la mesure compatible avec des limites.
        Si on veut généraliser l'additivité à un nombre infini de parties disjointes, on a des problèmes (donner des exemples). Si on veut pouvoir donner la mesure de toutes les parties de ℝ, on a des problèmes. Il faut donc préciser les parties de ℝ que l'on veut pouvoir mesurer, donner la définition de la mesure, et préciser ses propriétés.
        Théorème (admis) : il existe une famille de parties de ℝ, qu'on appelle parties mesurables, qui contient les intervalles de ℝ, qui est stable par passage au complémentaire et par unions dénombrables, et une fonction μ : -→ℝ+ ∪{∞}qui vérifie les propriétés suivantes :

        1. pour tout intervalle I de ℝ, μ(I) ∈ℝ+ ∪{∞}est la longueur de I.

        2. pour toute famille dénombrable d'ensembles mesurables En, on a

        Cette mesure μ est définie de la manière suivante (admis) : pour E mesurable

    2. Propriétés de la mesure de Lebesgue (admises).

    3. Construction formelle de l'intégrale sur ℝ :

        1. Définition des fonctions étagées ; intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée. Propriétés de celles-ci : indépendance vis-à-vis de la représentation de la fonction étagée, linéarité, additivité, croissance (si ϕ(x) ≤ψ(x) pour tout x, alors ∫ ϕ ≤∫ ψ), inégalité triangulaire (|∫ ϕ|≤∫ |ϕ|).

        2. Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives.

        3. Théorème de convergence monotone.

        4. Linéarité de l'intégrale.

        5. Lemme de Fatou.

        6. Intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables à valeurs complexes.

        7. Théorème de la convergence dominée.

        8. Les fonctions Riemann intégrables sur un segment sont Lebesgue intégrables sur ce segment et les intégrales coïncident ; idem pour les intégrales généralisées de fonctions positives.

- (6 semaines soit 12h CM, 18h TD) Cette partie a pour objectif d'introduire à la notion de différentielle pour familiariser les étudiants avec ce concept.

    1. Pour f : (E,‖ ‖E)-→(F,‖ ‖F) une application entre deux espaces vectoriels normés, on rappelle la définition de continuité, et on donne la définition de différentiabilité.

        Attention, la notion d'evn a été introduite au S5 dans l'UE "Suites et séries de fonctions" mais n'est étudiée réellement qu'au S6 dans l'UE "Topologie" en parallèle de cette UE. Il faudra donc bien se coordonner entre enseignants pour que la continuité ait bien été traitée avant la différentiabilité.

    2. Nombreux exemples. Dans ce cours, E et F ne sont pas nécessairement de dimension finie, mais on considérera (presque) exclusivement des exemples en dimension finie. En voici certains possibles :

        1. les fonctions de ℝ dans ℝ.

        2. L'application A ∈Mn(ℝ)A^2 ∈Mn(ℝ).

        3. L'application X ∈$\mathbb{R}^n$⍰AX,X⍰∈ℝ pour une matrice A symétrique ou non.

        4. L'application (A,B) ∈Mn$(\mathbb{R})^2$AB ∈Mn(ℝ).

    3. Différentielle d'une combinaison linéaire ou d'une composée de fonctions différentiables.

    4. Fonctions de plusieurs variables. Dérivées partielles d'une application f : U ⊂$\mathbb{R}^n$-→F . Matrice jacobienne. Lien entre différentielle et dérivées partielles.

    5. Dérivées partielles d'ordre supérieur. Lemme de Schwarz (admis). Formule de Taylor-Young (admis).

    6. Lien avec l'intégration : Continuité et dérivabilité des intégrales à paramètre ; Fubini ; Changement de variables dans une intégrale (uniquement s'il y a la place).

COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

Connaissances du cours L'objectif de ce cours est de présenter aux étudiants l'intégration de Lebesgue et les fondements du calcul différentiel de sorte qu'ils en aient déjà une première vision avant d'aborder des cours plus formels en master. On s'autorisera à donner certains résultats sans démonstration. Le temps imparti ne permet pas une présentation en profondeur de ces deux sujets, et on préférera la

clarté à la quantité.
Sur la partie intégration, on insistera sur l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, et de la convergence dominée plutôt que sur la présentation complète de la théorie.
Sur la partie calcul différentiel, on ne présentera pas les démonstrations les plus longues, pour privilégier le développement d'exemples.

MODALITÉS D'ORGANISATION

24h cours, 36h TP

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 60 heures
- Cours magistraux: 24 heures
- Travaux dirigés: 36 heures

CODES APOGÉE

- SMI6U30L [ELP]

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

POUR PLUS D'INFORMATIONS

[Aller sur le site de l'offre de formation...]

Dernière modification le 17/07/2024