Licence Mathématiques
Séries entières et séries de Fourier

Responsable	Descriptions	Informations
	Code : SMI6U22	Composante : Faculté des Sciences
	Nature : Unité d'enseignement	
	Domaines : Sciences et Technologies	

LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

CONTENU

1. Séries entières en tant que séries numériques : 3 semaines (9h CM, 14h TD)
   - Rappels sur la convergence des suites et séries dans ℂ. Définition des séries entières vues comme séries numériques dans ℂ.
   - Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence et du disque de convergence. Convergence ou divergence dans le disque ou à l'extérieur. Exemples de comportement variés pour |z|= R.
   - Critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence. Exemple d'un cas où ça ne s'applique pas directement, $\sum z^{2n}$.
   - Comparaison de rayons de convergence pour |an|≤|bn|. "$\sum anz^n$, $\sum nanz^{n-1}$ et $\sum z^{n+1}$ ont même rayon de convergence".
   - Définition du produit de Cauchy de deux séries entières. Comportement du rayon de convergence par somme et produit.
   - Définition de l'exponentielle complexe via sa série entière.
2. Étude de fonctions de ℝ dans ℝ définies comme la somme d'une série entière : 4 semaines (12h CM, 18h TD)
   - Définition de la convergence simple pour une série de fonctions.
   - Ensemble de définition pour une fonction définie comme la somme d'une série entière (ie ensemble de ℝ où la série numérique converge). Lien avec l'intervalle de convergence (ie le disque de convergence dans ℝ,]-R,R[). Lien avec la convergence simple de la série des fonctions $xanx^n$.
   - Convergence normale d'une série de fonctions définies sur un segment [a,b]. La convergence normale implique la convergence simple mais la réciproque n'est pas vraie. Continuité de la somme. Intégrabilité et dérivabilité de la somme sur [a,b].

     Ici, on fera bien attention à simplifier au maximum les énoncés et à admettre les preuves si besoin. En particulier, on n'introduira pas la convergence uniforme.
   - Convergence normale d'une série entière sur tout segment [a,b] inclus dans l'intervalle de convergence.
   - Régularité de la somme de la série entière : continuité, dérivation et intégration terme à terme sur l'intervalle de convergence.

     Attention à bien détailler le passage de la continuité (resp. dérivabilité) sur tout segment [a,b] à la continuité (resp. dérivabilité) sur l'ensemble de l'intervalle ouvert de convergence. Ce sera l'occasion de rappeler/préciser les définitions de la continuité (resp. dérivabilité) sur un intervalle]a,b[et sur un intervalle [a,b].
   - Si la série de terme général anr^n converge alors $z\sum nanz^n$ est continue sur [0,r] (démonstration admise). Continuité de la fonction somme d'une série entière sur son ensemble de définition. Exemple d'utilisation pour le calcul de sommes de séries numériques.
3. Développement en série entière d'une fonction de ℝ dans ℝ : 2 semaines (6h CM, 9h TD)
   - Définition d'une fonction développable en série entière. Combinaison linéaire, produit, dérivée et primitive de fonctions développables en série entière. Inverse d'une fonction développable en série entière qui ne s'annule pas.

     On se contentera de définir les développements en série entière centrés en 0.
   - Série de Taylor et développement en série entière. Liens entre parité et coefficients.
   - Développement en série entière de fonctions usuelles : , ln(1 + x), arctan(x), exp(x), cos(x), sin(x), $(1+x)^{\alpha}$. Exemples d'utilisation pour le calcul de somme de séries numériques.
4. Séries de Fourier : 3 semaines (9h CM, 13h TD).
   - Définition d'une fonction périodique, définition d'une fonction périodique continue par morceaux. La dérivée d'une fonction T -périodique est T -périodique. Contre-exemple pour une primitive. Si f est T -périodique et continue par morceaux, $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$ pour tout a ∈ℝ.

     Dans cette partie, on mettra en évidence comment transformer une fonction T -périodique en une fonction 2π-périodique car dans la suite, les théorèmes ne seront énoncés que pour les fonctions 2π-périodiques.
   - Étude de l'espace euclidien des fonctions à valeurs dans ℝ, 2π-périodiques et continues par morceaux telles que ∀x∈ℝ f(x) = muni du produit scalaire ⍰f,g⍰= $\int_0^{2\pi} fg$. Définition de la norme associée. La famille de fonctions = {x1, x2sin(nx), x2cos(nx),n ∈$ℕ^*$} est orthonormée dans .

     Attention, on ne s'intéressera qu'aux fonctions à valeurs réelles. L'introduction de cet espace euclidien permet d'éclairer la formule de Parseval et de donner un sens au séries de Fourier en terme de "projection" sur un sous-ensemble de fonctions mais le cadre est malgré tout "inadapté" faute de connaissances suffisante et les étudiants n'ont pas à maîtriser les propriétés de cet espace.
   - Polynômes trigonométriques à valeurs dans ℝ. Lien entre coefficients du polynôme et produit scalaire avec les fonctions de .
   - Coefficient de Fourier. Lien avec le produit scalaire. Exemple de calcul des coefficients de Fourier pour une fonction à valeurs dans ℝ, 2π-périodique et continue par

morceaux. Liens entre parité et coefficients. Exemple des fonctions créneau et triangle.

- Définition de la série de Fourier d'une fonction à valeurs dans ℝ, 2π-périodique et continue par morceaux.
- Théorème de Dirichlet. Application au calcul de sommes. Phénomène de Gibbs.
- Convergence en moyenne quadratique pour f dans . Égalité de Parseval. Extension à toute fonction continue par morceaux. Application au calcul de sommes.

  Dans ces preuves, on pourra admettre certains résultats comme la "densité" des polynômes trigonométriques dans ou l'interversion limite-intégrale dans le cas général. En cas de manque de temps, on pourra même admettre la démonstration et ne donner que les grandes idées. On pourra aussi choisir de tout démontrer si le temps le permet.

Dernière modification le 17/07/2024

COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

Connaissances du cours Le but de cette UE est que les étudiants sachent manipuler proprement les séries entières et les séries de Fourier mais pas qu'ils maîtrisent les démonstrations théoriques avec des suites ou séries de fonctions générales.

Pour éviter les confusions nombreuses sur ces notions, on fera attention à bien noter la série numérique ou de fonctions (c'est-à-dire la suite des sommes partielles) $\sum x_n$ ou $\sum_{n\geq 1} x_n$, et la somme de la série (c'est à dire la limite) $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. On fera également attention tant que possible à ne pas "confondre" la fonction f_n et la valeur $f_n(x)$.

Compétences A la fin de l'UE, les étudiants :

- savent déterminer et comparer le rayon de convergence de séries entières plus ou moins compliquées.
- savent calculer les coefficients de Fourier d'une fonction périodique.
- connaissent les propriétés des séries entières et séries de Fourier et peuvent les utiliser pour résoudre des problèmes (ie. calcul d'une somme ou résolution d'une équa diff) s'ils sont guidés.
- savent reconnaître le développement en séries entières des fonctions usuelles.

MODALITÉS D'ORGANISATION

36h cours, 54h TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 90 heures
- Cours magistraux: 36 heures
- Travaux dirigés: 54 heures

CODES APOGÉE

- SMI6U22C [ELP]
- SMI6U22T [ELP]

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

POUR PLUS D'INFORMATIONS

[Aller sur le site de l'offre de formation...]