Licence Mathématiques
Équations différentielles

Informations

Composante : Faculté des Sciences

Langue(s) d'enseignement

Français

Contenu

Première partie :

Résolution exacte d'équations différentielles (2h CM, 6h TD)

- Définition d'équation différentielle du premier ordre ; condition de Cauchy (ou condition initiale) ; problème de Cauchy ; solution maximale ; équations à variables séparables ; exemples.

  Parmi les exemples incontournables pour la suite du cours, les équations du type $y' = y^{\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$ (pour la non-unicité) ou $\alpha > 1$ (pour l'explosion en temps fini) devraient être étudiées au moins pour des choix pertinents du paramètre α.

- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients continus : $y'+ay = b$. Résolution de l'équation sans second membre. Méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation générale.

  D'autres exemples d'équations différentielles pouvant se ramener à une équation linéaire d'ordre 1 par changement de variable ou résolutions successives (système d'équations linéaires, équations linéaires d'ordre 2 (voire n) à coefficients constants, ...) pourront être abordés en cours ou en TD.

Deuxième partie :

Le théorème de Cauchy-Lipschitz en dimension 1 et ses conséquences (6h CM, 6h TD)

- Équations différentielles de la forme $x' = f(t,x)$ sur $I \times \Omega$ avec I et Ω des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Définition d'une fonction de classe C^1 en (t,x). Théorème d'existence et unicité de Cauchy-Lipschitz pour des fonctions de classe C^1. Unicité de la solution maximale.

  Attention, les étudiants n'ont jamais vu les fonctions de plusieurs variables (ni même les normes dans $\mathbb{R}^2$). L'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz sera donc fait pour des fonctions de classe C^1 et uniquement en dimension 1 d'espace. La démonstration sera admise.

- Théorème des bouts (ou de sortie de tout compact ou d'explosion en temps fini) en dimension 1. Lemme de Gronwall en dimension 1. Application à l'existence de solutions globales. Exemple d'étude qualitative de solutions.

  Les démonstrations des théorèmes pourront être admises en cas de manque de temps. L'étude qualitative des équations différentielles en dimension 1 sera toujours guidée par des questions précises.

Troisième partie :

Résolution approchée d'équations différentielles en dimension 1. (4h CM, 6h TP)

- Schéma d'Euler explicite. Définition de la notion de convergence d'un schéma. Preuve de la convergence à l'ordre 1 du schéma d'Euler explicite.

- Définition du schéma d'Euler implicite. Comparaison des schémas explicite et implicite pour les équations $y' = \lambda y$.

- TP en python : Résolution numérique d'une équation différentielle par le schéma d'Euler, étude expérimentale de l'erreur et de l'ordre de convergence. Résolution d'une équation différentielle issue d'un contexte appliqué (dynamique des populations, mécanique ou économie) et interprétation des solutions dans ce contexte.

Compétences à acquérir

Connaissances du cours

- Il faut connaître et maîtriser parfaitement les définitions, les méthodes et les théorèmes du cours. Il faut savoir refaire les exemples donnés dans le cours.

- Cette UE est l'occasion de revenir sur des calculs d'intégrales. En revanche, les fonctions de plusieurs variables n'ont pas encore été étudiées précisément. Seule la notion d'une application générale d'un ensemble dans un autre a été introduite en S2. Les fonctions de plusieurs variables pourront donc être utilisées mais avec prudence.

- La notion de norme et d'espace euclidien n'est introduite qu'en parallèle de cette UE et ne pourra donc être utilisée qu'avec prudence et après un certain délai. Dans tous les cas, la notion de norme ne doit pas être considérée comme maîtrisée.

- La notion de différentielle est complètement au delà du programme et ne pourra donc pas être utilisée. De même, les notions de bases de topologie (ouvert, fermé, etc) ne sont pas connus des étudiants et ne seront vues qu'au semestre suivant. Ces notions ne doivent donc pas être utilisées. Seuls les intervalles ouverts voisinages de chacun de leurs points ont été introduits dans l'UE "Suite et fonctions" du S3.

- Des TP en Python sont prévus pour la partie numérique sur la méthode d'Euler.

- La première partie du cours doit rester calculatoire. Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 ont déjà été abordées en S2 Descartes dans l'UE "Suites, intégration et systèmes linéaires" mais rapidement et uniquement pour retravailler l'intégration. Ici, le but est que les étudiants maîtrisent les techniques de base pour résoudre des équations différentielles classiques de façon autonome et qu'ils aient quelques exemples qui serviront de référence pour la suite du cours. L'utilisation des équations d'ordre 1 pour résoudre des équations ou systèmes d'équations plus compliquées pourra ne pas être traitée en cas de manque de temps.

- La deuxième partie doit introduire à l'étude qualitative des équations différentielles sur des exemples simples : existence globale de solutions ou explosion en temps fini, monotonie des solutions et convergence vers un "équilibre" (la notion ne sera pas nécessairement introduite), exemple de tracé de solutions en fonction du temps, etc.

- La troisième partie portera aussi bien sur l'étude théorique des schémas d'Euler que sur une étude numérique d'une équation différentielle issue d'un contexte appliqué.

Compétences

1. Savoir résoudre une équation à variable séparable ou une équation linéaire du premier ordre sans aide.

2. Connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des équations différentielles en dimension 1 en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation. Il faut savoir expliquer comment ce théorème s'applique dans le contexte de l'exercice, notamment en explicitant la fonction $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n f(t,x) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $x'(t) = f(t,x(t))$, tout en prenant soin de distinguer la variable x et la fonction $x : tx(t)$.

3. Savoir programmer la méthode d'Euler explicite en dimension 1.

4. Savoir résoudre numériquement une équation différentielle à l'aide de Python (via la commande ode de la librairie scipy ou équivalent) en dimension 1 et interpréter les résultats.

Modalités d'organisation

12h cours, 12h TD, 6h TP

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 30 heures
- Cours magistraux: 12 heures
- Travaux dirigés: 12 heures
- Travaux pratiques: 6 heures

Codes Apogée

- SMI5U22L [ELP]

Pour plus d'informations

[Aller sur le site de l'offre de formation...]

Dernière modification le 27/02/2025