Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Licence Mathématiques
Algèbre bilinéaire

Responsable	Descriptions	Informations
	Code : SMI5U19	Composante : Faculté des Sciences
	Nature : Unité d'enseignement	
	Domaines : Sciences et Technologies	

LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

CONTENU

Ce cours fait suite aux cours d'algèbre linéaire de S3 et S4. On travaillera uniquement sur $\mathbb{R}$.

- Généralités sur les formes bilinéaires : définition, expression en coordonnées, matrice associée. Formes bilinéaires symétriques et lien avec les matrices symétriques. Changement de base pour les matrices.

- Espaces euclidiens : définition d'un produit scalaire et de la norme associée. Inégalité de Cauchy–Schwarz et inégalité triangulaire. $4\langle x,y\rangle= \|x+ y\|^2 -\|x-y\|^2$. Exemples : $\mathbb{R}^n$ euclidien, espaces de matrices, polynômes, polynômes trigonométriques.

  Orthogonalité, lien avec la somme directe. Bases orthonormées et expression du produit scalaire en coordonnées dans celles-ci.

- Isométries d'un espace euclidien : définition, exemples : symétries orthogonales, rotations. Matrices en base orthonormée. Isométries directes et indirectes. Classification des isométries en dimension 2. Forme réduite des isométries en dimension 3 (on pourra évoquer la forme réduite en toute dimension mais la démonstration de l'existence d'un plan stable devrait être considérée comme hors-programme).

- Opérateurs autoadjoints : définition, matrice en base orthonormée. Exemples : projecteurs orthogonaux. Préservation de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Existence d'un vecteur propre réel et théorème spectral. Forme matricielle du théorème spectral.

- Formes quadratiques réelles : forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique, expression en coordonnées. Polarisation, correspondance entre formes quadratiques, formes bilinéaires symétriques et matrices symétriques.

  Noyau d'une forme bilinéaire symétrique, notion de forme non dégénérée. (Il faudra traiter quelques exemples isotropes en dimensions ≤ 3 en exercice).

  Réduction en base orthonormée avec le théorème spectral. Calcul explicite en dimension 2.

  Algorithme de Gauss pour la réduction (on soulignera la différence avec la réduction en base orthonormée). Signature d'une forme non dégénérée (la loi d'inertie de Sylvester peut être admise).

  Application : classification des coniques euclidiennes. Exemples de quadriques.

COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

Connaissances du cours

La définition abstraite de forme bilinéaire et le lien avec l'expression en coordonnées doivent être compris. Les notions et résultats fondamentaux sur les espaces euclidiens (produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, isométries, opérateurs autoadjoint) doivent être assimilés ainsi que le lien avec la géométrie du plan et de l'espace.

Les démonstrations "élémentaires" (celles qui suivent immédiatement des définitions données) devraient pouvoir être reproduites avec aisance par les étudiants (par exemple il faut savoir immédiatement montrer qu'une forme bilinéaire est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base quelconque l'est, que les isométries ou opérateurs autoadjoints préservent l'orthogonal d'un sous-espace stable, ou que des sous-espaces orthogonaux sont en somme directe...). Certaines démonstrations plus conséquentes mais élémentaires (classification des isométries planes, Cauchy–Schwarz) devraient aussi être connues. Les démonstrations plus élaborées (théorème spectral en particulier) ne sont pas exigibles.

Le lien de l'orthogonalité avec les équations de sous-espaces pourra être évoqué dans des exercices mais il n'est pas question d'étudier la dualité en général.

Compétences
Du point de vue calculatoire il faut savoir :

- Calculer l'orthogonal d'un sous-espace.

- Utiliser l'algorithme de Gram–Schmidt pour donner une base orthonormée (en particulier pour les espaces de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ou 3 au maximum).

- Reconnaître une isométrie et donner ses éléments géométriques en dimension 2 et 3 (axe, angle pour les rotations ; miroir pour les réflexions).

- Réduire une conique euclidienne (c'est à dire déterminer son type et trouver les axes).

- Déterminer la signature d'une forme quadratique en 3 variables.

Du point de vue plus théorique il s'agit de continuer la formation à la réflexion dans un cadre abstrait guidée par l'intuition géométrique entamée dans les UEs d'algèbre linéaire des semestres 3 et 4.

MODALITÉS D'ORGANISATION

24h cours, 36h TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 60 heures
- Cours magistraux: 24 heures
- Travaux dirigés: 36 heures

CODES APOGÉE

- SMI5U19L [ELP]

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

POUR PLUS D'INFORMATIONS

Aller sur le site de l'offre de formation...

Dernière modification le 17/07/2024