Licence Mathématiques
Fonctions de plusieurs variables & équations différentielles

Responsable	Descriptions	Informations
	Code : SMI5U18	Composante : Faculté des Sciences
	Nature : Unité d'enseignement	
	Domaines : Sciences et Technologies	

LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

CONTENU

1. Les espaces vectoriels normés de dimension finie : 4 semaines (12h CM, 16h TD)

   - Définition d'une norme sur un espace vectoriel. Exemple de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et du module sur $\mathbb{C}$. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur $\mathbb{R}^n$. Exemples des normes de matrices ou des normes d'applications linéaires. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur l'ensemble des fonctions continues sur [a,b].

     Attention, la notion de norme n'a pas été introduite avant mais en parallèle, les étudiants étudient les espaces euclidiens dans l'UE "Espaces euclidiens et géométrie".

   - Convergence dans un espace vectoriel normé de dimension finie : Définition de la convergence d'une suite d'un evn à l'aide des normes. Théorème sur l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$ (admis). Équivalence avec la convergence coordonnée par coordonnée dans un evn de dimension finie. Nombreux exemples explicites.

   - Vocabulaire de topologie (dans $\mathbb{R}^n$) : ouvert, fermé, voisinage, adhérence, intérieur. Nombreux exemples simples. Caractérisation séquentielle des ensembles fermés et de l'adhérence. Intersection et union finie d'ouverts ou de fermés.

     Les notions d'adhérence et de voisinage ont été introduite dans l'UE "Suite et fonctions d'une variable réelle" du S3 pour les ensembles de $\mathbb{R}$ mais n'ont pas été travaillées.

   - Fonction de $\mathbb{R}$ dans un evn de dimension finie. Définition de la continuité et de la dérivabilité avec les normes. Équivalence avec la continuité et la dérivabilité des applications coordonnées. Exemple d'étude simple de courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Vecteur tangent à la courbe.

2. Fonctions de plusieurs variables $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$: 5 semaines (15h CM, 20h TD)

   - Continuité. Définition. Continuité d'une combinaison linéaire et d'une composée. Continuité du produit ou d'un quotient dont le dénominateur ne s'annule pas. Continuité des fonctions polynomiales en plusieurs variables.

   - Si f est continue, les ensembles du type $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}$ sont ouverts (et fermés si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large).

   - Définition des applications partielles. Continuité des applications partielles. Exemples et contre-exemples.

   - Dérivée en un point selon un vecteur, dérivées partielles d'ordre 1. Une fonction est dite de classe ^{1} si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues. Opérations sur les fonctions de classe ^{1}.

   - Une fonction de classe ^{1} admet en tout point un développement limité d'ordre 1. Définition de la différentielle de f en un point. Exemples simples ou un peu plus théoriques comme $X \in \mathbb{R}^n$⍰AX,X⍰ avec A symétrique.

     Attention, le produit scalaire est étudié en parallèle dans l'UE "Espaces euclidiens et géométrie".

   - Dérivée de tf(x1(t),...,xn(t)). Application au calcul des dérivées partielles de :

     Exemple des coordonnées polaires.

   - Gradient d'une fonction de classe ^{1}. Interprétation comme la direction de plus grande croissance locale. Cas géométriques : courbe du plan définie par f(x,y) = 0 avec f de classe ^{1} (on admettra que cette courbe admet un paramétrage local ^{1} au voisinage d'un point régulier) . En un point régulier, la tangente est orthogonale au gradient. Surface du plan définie par f(x,y,z) = 0 avec f de classe ^{1}. En un point régulier, le plan tangent est défini comme l'orthogonal au gradient.

   - Fonctions de classe ^{2}. Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Schwarz. Matrice Hessienne d'une fonction de classe ^{2} en un point. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

   - Extrema locaux et globaux d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Point critique d'une application de classe ^{1}. Si une fonction de classe ^{1} admet un extremum local en a, alors a est un point critique.
     Étude des extrema locaux d'une fonction de classe ^{2} (dans les cas n = 2 et 3 uniquement).

3. Équations différentielles en dimension 1 : 3 semaines (9h CM, 12h TD, 6h TP)

   - Définition d'équation différentielle du premier ordre ; condition de Cauchy (ou condition initiale) ; problème de Cauchy ; solution maximale ; équations à variables séparables ; exemples.

     Parmi les exemples pour la suite du cours, les équations du type $y' = y^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ (pour la non-unicité) ou $\alpha > 1$ (pour l'explosion en temps fini) devraient être étudiées au moins pour des choix pertinents du paramètre α.

   - Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients continus : $y' + ay = b$. Résolution de l'équation sans second membre. Méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation générale.

     Ces notions ont déjà été vues dans l'UE "Suites, intégration et systèmes linéaires" du S2 Descartes mais doivent être reprises. La résolution de systèmes d'équations différentielles linéaires dans $\mathbb{R}^2$ ou la résolution d'équations linéaires d'ordre 2 sera étudiée en TD mais les étudiants n'ont pas à savoir appliquer les méthodes de façon autonome.

   - Équations différentielles de la forme $X' = f(t,X)$ sur $I \times \Omega$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Théorème d'existence et unicité de Cauchy-Lipschitz dans le cas [1] [énoncé seulement, sans démonstration, avec commentaires]. Utilisation pour montrer la positivité de solutions d'une équation différentielle modélisant un problème issu de la biologie, de la mécanique ou de l'économie.

- Méthode numérique : schéma d'Euler explicite. Notion de convergence et démonstration.
- TP en python : résolution numérique d'une équation différentielle à l'aide du schéma d'Euler. Résolution d'une équation différentielle issue d'un contexte appliqué (dynamique des populations, mécanique ou économie) et interprétation des solutions dans ce contexte.

Dernière modification le 17/07/2024

COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

Connaissances du cours La première partie sur les evn et la topologie n'a pas à être traitée de manière exhaustive. Le but est uniquement que les étudiants connaissent les outils nécessaires à l'étude des fonctions de plusieurs variables. On pourra donc montrer des contre-exemples qui illustrent certaines propriétés mais on se contentera d'exercices dans des cas simples que les étudiants rencontreront dans la suite du cours ($\mathbb{R}^n\backslash\{a\}$, $\mathbb{R}^n\times[0,+\infty[$ ou $]0,+\infty[^n$).

De même pour les fonctions, on privilégiera des exemples de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. De manière générale, on privilégiera les exemples aux démonstrations, et on insistera sur la signification des énoncés plutôt que sur leurs démonstrations qu'on admettra si nécessaire. Il faut que les étudiants s'approprient ces résultats, et le temps consacré au cours permet de développer des exemples significatifs.

Cette UE sera l'occasion de revoir l'usage des quantificateurs ; en particulier quand on travaillera les notions de topologie. C'est aussi l'occasion de revenir sur des calculs de dérivées et d'intégrales.

Compétences A la fin de l'UE,

1. Les étudiants doivent savoir calculer une dérivée de composées de fonctions en plusieurs variables dans des cas concrets.
2. Les étudiants doivent être capables de mener complètement l'étude des extrema locaux et globaux d'une fonction de deux variables.
3. Les étudiants savent résoudre de manière exacte une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de façon autonome. Ils savent résoudre de manière approchée à l'aide de Python une équation différentielle simple.

MODALITÉS D'ORGANISATION

36h de cours, 48h de TD, 6h de TP

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 90 heures
- Cours magistraux: 36 heures
- Travaux dirigés: 48 heures
- Travaux pratiques: 6 heures

CODES APOGÉE

- SMI5U18C [ELP]
- SMI5U18T [ELP]

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

POUR PLUS D'INFORMATIONS

[Aller sur le site de l'offre de formation...]