

Licence Mathématiques

Groupes

Informations

Composante : Faculté des Sciences

Langue(s) d'enseignement

Français

Contenu

- Notion de groupe : définition formelle et illustration par les groupes \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{R}^* , S^1 , GL_2 . Unicité de l'inverse et de l'élément neutre. Produit cartésien, exemple $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$.
- Groupe cyclique, groupe monogène. Groupe additif des entiers modulo n , $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, groupe des racines n -ièmes de l'unité.
- Groupe des bijections d'un ensemble. Groupe symétrique S_n . Représentation des permutations sous la forme d'un tableau à deux lignes, composition, inverse. Table de la loi du groupe symétrique pour $n = 2, 3$.
- Définitions de transposition, du support d'une permutation, d'un cycle. S_n est engendré par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Les permutations à supports disjoints commutent.
- Sous-groupe, morphisme et isomorphisme : définition, illustration sur les exemples simples.
- Ordre d'un élément, calcul dans les groupes symétriques et les groupes cycliques. Théorème de Lagrange (admis).
- Définition de la signature (on peut admettre que la signature correspond au nombre de transpositions nécessaires pour écrire la permutation). Sous-groupe alterné (on ne parle pas dans ce cours de sous-groupe distingué).
- Isomorphisme de groupes entre $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ lorsque p et q sont premiers entre eux (théorème des restes chinois).

Compétences à acquérir

Connaissances du cours

Prérequis, qui devront être évalués : bijection, bijection réciproque, composition d'applications, produit de matrices, divisibilité dans \mathbb{Z} , division euclidienne, calculs modulo n .

Les définitions, théorèmes doivent tous être connus parfaitement.

La définition d'un groupe doit être connue exactement avec les quantificateurs ; l'unicité de l'élément neutre et des inverses doit pouvoir être démontrée à partir des axiomes.

Le passage d'une notation à une autre des permutations (diagramme, matricielle, cycles), la composition et l'inversion avec ces diverses représentations doivent devenir des automatismes de calcul pendant ce cours.

Calculer la décomposition en cycles à support disjoint d'une permutation et son ordre doivent être acquis à la fin de ce cours.

Connaître les éléments du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et leurs ordres, identifier ce groupe avec le groupe des racines complexes n -ièmes de l'unité.

Le programme est un peu long et les deux derniers points du programme ne pourront pas être traités en profondeur, et il ne faudra pas hésiter à admettre certains points.

Compétences

Connaître des exemples de groupes, déterminer si un ensemble muni d'une loi est un groupe, identifier l'élément neutre, les inverses, reconnaître si un groupe est commutatif.

Exemples à connaître : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $GL_2(\mathbb{R})$, S_n , \mathbb{Z}^d , $(\mathbb{Q}^*, \times, 1)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 0)$ sont des groupes, $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{Z}, \times) ne sont pas des groupes.

Savoir définir S_n , connaître son cardinal, les injections de S_n dans S_m pour $n \leq m$. Pouvoir lister les différents types d'éléments de S_n pour $n \leq 5$ (c'est-à-dire les classes de conjugaison) sans pour autant connaître la conjugaison. Connaître l'ordre de ces éléments.

Savoir calculer l'ordre d'une permutation, l'ordre d'un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Connaître des éléments d'ordre infini.

Connaître les sous-groupes de \mathbb{Z} .

Modalités d'organisation

12h de cours, 18h de TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 30 heures
- Cours magistraux: 12 heures
- Travaux dirigés: 18 heures

Codes Apogée

- SMI5U14C [ELP]
- SMI5U14T [ELP]

Pour plus d'informations

[Aller sur le site de l'offre de formation...](#)



Dernière modification le 27/02/2025