

# Licence Mathématiques

## Groupes

Responsable	Descriptions	Informations
	Code : SMI5U14	Composante : Faculté des Sciences
	Nature : Unité d'enseignement	
	Domaines : Sciences et Technologies	

### LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

### CONTENU

- Notion de groupe : définition formelle et illustration par les groupes  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^1$ ,  $S^1$ ,  $GL_2(\mathbb{R})$ . Unicité de l'inverse et de l'élément neutre. Produit cartésien, exemple  $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n$ .
- Groupe cyclique, groupe monogène. Groupe additif des entiers modulo  $n$ ,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ , groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité.
- Groupe des bijections d'un ensemble. Groupe symétrique  $S_n$ . Représentation des permutations sous la forme d'un tableau à deux lignes, composition, inverse. Table de la loi du groupe symétrique pour  $n = 2, 3$ .
- Définitions de transposition, du support d'une permutation, d'un cycle.  $S_n$  est engendré par les transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Les permutations à supports disjoints commutent.
- Sous-groupe, morphisme et isomorphisme : définition, illustration sur les exemples simples.
- Ordre d'un élément, calcul dans les groupes symétriques et les groupes cycliques. Théorème de Lagrange (admis).
- Définition de la signature (on peut admettre que la signature correspond au nombre de transpositions nécessaires pour écrire la permutation). Sous-groupe alterné (on ne parle pas dans ce cours de sous-groupe distingué).
- Isomorphisme de groupes entre  $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  lorsque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux (théorème des restes chinois).

### COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

#### Connaissances du cours

Prérequis, qui devront être évalués : bijection, bijection réciproque, composition d'applications, produit de matrices, divisibilité dans  $\mathbb{Z}$ , division euclidienne, calculs modulo  $n$ .

Les définitions, théorèmes doivent tous être connus parfaitement.

La définition d'un groupe doit être connue exactement avec les quantificateurs ; l'unicité de l'élément neutre et des inverses doit pouvoir être démontrée à partir des axiomes.

Le passage d'une notation à une autre des permutations (diagramme, matricielle, cycles), la composition et l'inversion avec ces diverses représentations doivent devenir des automatismes de calcul pendant ce cours.

Calculer la décomposition en cycles à support disjoint d'une permutation et son ordre doivent être acquis à la fin de ce cours.

Connaître les éléments du groupe additif  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et leurs ordres, identifier ce groupe avec le groupe des racines complexes  $n$ -ièmes de l'unité.

Le programme est un peu long et les deux derniers points du programme ne pourront pas être traités en profondeur, et il ne faudra pas hésiter à admettre certains points.

### Compétences

Connaître des exemples de groupes, déterminer si un ensemble muni d'une loi est un groupe, identifier l'élément neutre, les inverses, reconnaître si un groupe est commutatif.

Exemples à connaître :  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $GL_2(\mathbb{R})$ ,  $S_n$ ,  $\mathbb{Z}^d$ ,  $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$ ,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 0)$  sont des groupes,  $(\mathbb{N}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, \times)$  ne sont pas des groupes.

Savoir définir  $S_n$ , connaître son cardinal, les injections de  $S_n$  dans  $S_m$  pour  $n \leq m$ . Pouvoir lister les différents types d'éléments de  $S_n$  pour  $n \leq 5$  (c'est-à-dire les classes de conjugaison) sans pour autant connaître la conjugaison. Connaître l'ordre de ces éléments.

Savoir calculer l'ordre d'une permutation, l'ordre d'un élément de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Connaître des éléments d'ordre infini.

Connaître les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ .

### MODALITÉS D'ORGANISATION

12h de cours, 18h de TD

### VOLUME HORAIRE

- Volume total: 30 heures
- Cours magistraux: 12 heures
- Travaux dirigés: 18 heures

### CODES APOGÉE

- SMI5U14C [ELP]
- SMI5U14T [ELP]

### M3C

Aucune donnée M3C trouvée

### POUR PLUS D'INFORMATIONS

[Aller sur le site de l'offre de formation...](#)



Dernière modification le 17/07/2024