Licence Mathématiques
Intégration et séries numériques

Responsables	Descriptions	Informations
Gael MEIGNIEZ (Responsable de l'UE à St-Charles) gael.MEIGNIEZ@univ-amu.fr Francois HAMEL (Responsable de l'UE à Aix-Montperrin) francois.hamel@univ-amu.fr	Code : SMI4U14 Nature : Unité d'enseignement Domaines : Sciences et Technologies	Composante : Faculté des Sciences

LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

CONTENU

1. Séries numériques : 3 semaines (6h CM et 9h TD)
   Attention, ce chapitre est à traiter impérativement en premier pour que l'UE de probabilités en parallèle puisse rapidement utiliser les notions.

    - Définition d'une série de terme général un dans ℝ ou ℂ (notation ∑un), de la somme partielle. Définition de la somme (notation ∑n=0$^{+\infty}$un) et du reste pour les séries convergentes. Exemple de la série géométrique, séries télescopiques. Autres exemples de séries convergentes et divergentes.
      Attention à bien mettre en évidence la différence entre somme finie, série et somme d'une série malgré l'utilisation du même symbole ∑.

    - Espace vectoriel des séries convergentes : stabilité par combinaison linéaire.

    - "Si la série est convergente, le reste converge vers 0, le terme général converge vers 0." Contre-exemple à la réciproque avec la série harmonique.

    - Comparaison des séries à terme général positif : cas un = o(vn), un ~vn, un = O(vn) et un ≤vn. Critères de convergence : D'Alembert et Cauchy.

    - Comparaison série - intégrale pour les fonctions monotones. Exemple pour déterminer la convergence de série du type ∑f(n) avec f décroissante dont on connaît une primitive. Exemple pour déterminer un équivalent de ∑k=1^{n}.
      Attention, l'intégration n'a pas encore été traitée en détails mais le calcul d'intégrales à été vu au S2 Descartes. Il est inutile d'énoncer les liens série-intégrale sous forme de nombreux théorèmes mais il faut mettre en avant la méthode.

    - Séries de références : Séries de Riemann.
      Il est possible de traiter les séries de Bertrand en exercice mais ce n'est pas un attendu du cours.

    - Séries à terme quelconque : définition de la convergence absolue. Théorème sur la convergence absolue qui entraîne la convergence simple (on pourra admettre ce résultat - les suites de Cauchy n'ont pas été vues). Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente. Exemple de série exponentielle. Définition de la semi-convergence. Théorème sur les séries alternées. Exemple de la série harmonique alternée.
      Les résultats sur les réarrangements de termes dans une série absolument convergente (utiles en probabilités) ou pour une série semi-convergente pourront être abordés en exercice ou en remarque en évitant les notations trop lourdes. Cependant, la maîtrise complète et autonome de ces résultats par les étudiants n'est pas attendue dans ce cours.

    - Sommation des relations de comparaison : un = o(vn), un ~vn et un = O(vn). Théorème pour les séries divergentes et de convergentes.

    - Culture générale : développement décimal illimité.

2. Intégrale de Riemann : 6 semaines (12h CM, 18h TD)

    - Construction de l'intégrale de Riemann sur un segment [a,b] : définition d'une subdivision, d'une fonction en escaliers. Espace vectoriel des fonctions en escaliers. Définition de l'intégrale d'une fonction en escaliers. Propriété de l'intégrale pour les fonctions en escaliers : combinaison linéaire, inégalité triangulaire, croissance et positivité, Chasles, égalité de l'intégrale si les fonctions diffèrent uniquement en un nombre fini de points.
      Dans cette partie, afin de préparer l'introduction de l'intégrale de Lebesgue en L3 Math approfondies, les subdivisions doivent être définies de façon générale et non pas comme une subdivision régulière du type a+k.

    - Définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann (i.e. encadrée par des fonctions en escaliers donc les intégrales diffèrent de moins de ε). Définition de l'intégrale d'une fonction intégrable au sens de Riemann. Les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann. Définition d'une fonction continue par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sont intégrables au sens de Riemann. Les fonctions dérivées sont intégrables au sens de Riemann (démonstration via le théorème des accroissements finis vu au S3).

    - Propriétés de l'intégrale : Linéarité, positivité, relation de Chasles. "Une fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle est nécessairement nulle".

    - Définition de la valeur moyenne. Théorème de la moyenne et inégalité de la moyenne. Interprétation géométrique.

    - Inégalité triangulaire pour l'intégrale de Riemann. Le produit de fonctions intégrables au sens de Riemann est intégrable au sens de Riemann. Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

    - Définition d'une primitive. "Deux primitives diffèrent d'une constante". "La fonction x∫ a^{x}f est l'unique primitive de f qui s'annule en a". "Les fonctions continues par morceaux admettent des primitives". Formule de calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.
      Cette partie a déjà été traitée longuement en S2 Descartes sous l'angle du calcul

    - Calcul d'intégrale : formule d'intégration par parties et formule de changement de variable.

    - Somme de Riemann : définition pour un système de points intermédiaires d'une subdivision quelconque. Théorème sur la convergence des sommes de Riemann. Application au calcul de limite de suites définie par des sommes.

3. Intégrales généralisées : 3 semaines (6h CM et 9h TD)

    - Définition de la convergence d'une intégrale sur un

intervalle semi-ouvert borné ou non borné. Premiers exemple. Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert.
Bien mettre en avant l'importance d'étudier séparément la convergence en chaque borne de l'intervalle et que cela ne peut se faire avec une seule limite.

- Propriétés des intégrales généralisées : Linéarité, positivité, relation de Chasles. "Une fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle est nécessairement nulle". Dérivée d'une intégrale généralisée fonction de sa borne supérieure (ou inférieure).

- Énoncé propre du théorème de comparaison série-intégrale. Intégrales de référence : intégrales de Riemann, intégrale d'une exponentielle.
On pourra à nouveau étudier les intégrales de Bertrand en TD mais elles ne font pas partie du cours.

- Comparaison d'intégrales pour les fonctions positives : f = o(g), f ~g, f = O(g) et f ≤g.

- Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert (∫ |f| converge). Inégalité triangulaire pour les fonctions intégrables. Définition d'une intégrale semi-convergente.

- Théorème de Cauchy-Schwarz. Théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées. Exemple des fonctions du type .
Pour les intégrations par parties, on demandera de toujours se ramener à un segment pour faire l'IPP avant de prendre la limite.

- Intégration des relations de comparaison. Cas de divergence et de convergence.

COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

Connaissances du cours Dans l'UE Suites et fonctions du S3, les énoncés ont été donnés dans ℝ avec simplement quelques remarques sur les suites et fonctions à valeurs complexes. Dans ce cours, on pourra énoncer les résultats pour des séries réelles ou complexes mais on appliquera généralement ces résultats à des séries dans ℝ. Néanmoins on pourra aussi considérer un ou deux exemples ou exercices sur des séries complexes pour habituer les étudiants à ce contexte.

Au niveau des exemples, la convergence des séries géométrique, des séries télescopiques et de la série harmonique a déjà été vu au S2 Descartes dans l'UE "Suites, systèmes linéaires et intégration", mais il est important de le répéter.

Attention, la notion de suite de Cauchy est hors-programme en L1 comme en L2. On évitera donc les démonstrations utilisant cette notion ou sinon il faudra redémontrer la convergence des suites de Cauchy dans ℝ.

Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes n'est pas au programme. Ce théorème pourra être introduit dans l'UE qui traite des séries entières en L3.

Les méthodes des rectangles ou des trapèzes pour le calcul approché d'intégrales ne sont pas au programme de cette UE mais des exercices de TD portant sur le sujet sont tout à fait adaptés pour illustrer la partie théorique de ce cours sur l'intégration.

Pour les théorèmes dont les démonstrations sont répétitives comme par exemple, les théorèmes de comparaison pour la convergence des séries ou des intégrales, on pourra faire une démonstration dans le cours et renvoyer les autres démonstration au TD.

L'étude des intégrales à paramètres dans sa généralité n'est pas au programme de cette UE et repoussé en L3 (quand les étudiants auront étudié les fonctions de plusieurs variables). Cependant l'étude du comportement des intégrales à paramètres dans différentes situation peut fournir des exercices théoriques pertinents pour cette UE.

Compétences

A la fin de cette UE, les étudiants doivent être capables d'estimer rapidement la convergence ou non d'une série donnée par une formule simple.
Il faut revenir de manière importante sur les aspects calculatoires des intégrales (via des changements de variables et des IPP). Ceux-ci ont été vus au S2 et doivent être consolidés ici. Il faut revenir sur des calcul d'intégrales de fractions rationnelles.

MODALITÉS D'ORGANISATION

24h de cours, 36h de TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 60 heures
- Cours magistraux: 24 heures
- Travaux dirigés: 36 heures

CODES APOGÉE

- SMI4U19A [ELP]
- SMI4U19L [ELP]
- SMI4U19C [ELP]
- SMI4U19T [ELP]

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

POUR PLUS D'INFORMATIONS

[Aller sur le site de l'offre de formation...]

Dernière modification le 17/07/2024