Licence Mathématiques
Probabilités

Responsables	Descriptions	Informations
Oleg LEPSKI (Responsable de l'UE à Luminy) oleg.lepski@univ-amu.fr Thomas WILLER (Responsable de l'UE à St-Charles) thomas.willer@univ-amu.fr Stephane BALLET (Responsable de l'UE à Aix-Montperrin) stephane.BALLET@univ-amu.fr	Code : SMI4U13 Nature : Unité d'enseignement Domaines : Sciences et Technologies	Composante : Faculté des Sciences

LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

CONTENU

1. Quelques rappels sur les ensembles.
    - Union, intersection d'ensembles et propriété de distributivité. Complémentaire d'un ensemble.
    - Injections, surjections, bijections. Image réciproque d'un ensemble par une application.
    - Ensembles finis et infinis, dénombrabilité d'un ensemble infini.
    - Parties d'un ensemble. Quelques résultats combinatoires (permutation, arrangement, combinaison). Formule du binôme de Newton.
2. Espace probabilisé discret.
    - Univers Ω, événements, mesure de probabilité ℙ sur (Ω,(Ω)).
    - Propriétés élémentaires des mesures de probabilité, continuité croissante des mesures. Formule du crible.
    - Premières modélisations : lancer d'une ou plusieurs pièces, de dés, etc.
3. Probabilités conditionnelles.
    - Définition de la probabilité conditionnelle ℙA(B).
    - Formule des probabilités composées.
    - Formule de Bayes pour deux événements.
    - Systèmes complets d'événements, formule des probabilités totales. Arbre de probabilité.
    - Indépendance de deux événements, d'une famille d'événements.
4. Variables aléatoires discrètes.
    - Définition. Evénement [X ∈A], lorsque A est un ensemble discret.
    - Loi d'une v.a. discrète. Exemple de deux v.a. différentes ayant la même loi.
    - Quelques lois usuelles : uniforme, Bernoulli (indicatrice d'un événement), binomiale, de Poisson, géométrique.
    - Espérance d'une v.a. discrète : définition, exemples, propriétés.
    - Théorème de transfert.
    - Variance d'une v.a. : définition, exemples, propriétés.
    - Fonction de répartition : définition, exemples. Propriétés, caractérisation de la loi.
    - Indépendance de deux v.a. discrètes, d'une famille de v.a. discrètes.
    - Somme de v.a. indépendantes. Exemple des binomiales.
    - Fonction génératrice d'une v.a. à valeurs entières : exemples et applications.
5. Couples de v.a. discrètes.
    - Définition.
    - Loi conjointe. Lois marginales, lois conditionnelles.
    - Covariance de deux v.a. Variance d'une somme de v.a.
    - Covariance de deux v.a. indépendantes. Exemple de v.a. dépendantes et non corrélées.
    - Application à la régression linéaire.
6. Variables aléatoires continues.
    - Espace probabilisé : Univers Ω, tribu des évènements sur Ω, mesure de probabilité ℙ sur (Ω,).
    - Définition d'une v.a. continue par mesurabilité (on n'insiste pas trop sur la notion de Borélien).
    - Événement [X ∈A], lorsque A est une partie borélienne de ℝ.
    - Définition d'une loi, d'une loi à densité. Quelques lois à densité usuelles : uniforme, exponentielle, Gamma (avec paramètre entier), de Cauchy, normale.
    - À titre culturel : définition de l'espérance par "intégrale de Lebesgue".
    - Espérance d'une loi à densité. Linéarité de l'espérance et Théorème de transfert admis.
    - Variance et fonction de répartition d'une loi à densité. Quelques calculs pour les lois usuelles.
7. Convergence de suites de v.a.
    - Notions de convergence presque-sûre et en probabilité, lien entre ces deux modes de convergence (preuve admise).
    - Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
    - Loi faible des grands nombres.
    - Définition de la convergence en loi. Caractérisation avec les fonctions de répartition.
    - Énoncé du théorème central limite. Quelques

applications.

COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

Connaissances du cours

Les définitions, exemples et énoncés doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant légèrement différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).

Un accent particulier est mis sur le fait de bien connaître les hypothèses de chaque théorème, en particulier pour la loi des grands nombres et le théorème central limite.

Les démonstrations sont toutes à comprendre. Il faut savoir les restituer sauf mention explicite du contraire, ce sera par exemple le cas pour le théorème de transfert.

Compétences

Le but du cours est de définir un cadre rigoureux dans lequel on peut construire une théorie des probabilités. À la fin de ce cours, il s'agit avant toute chose de se sentir suffisamment à l'aise dans ce nouveau cadre pour répondre à des problèmes concrets faisant intervenir de l'aléatoire. Cette compétence au sens large peut se décliner en trois sous-compétences :

Modélisation probabiliste Le traitement mathématique d'un problème avec une part d'aléatoire doit en premier lieu être décrit dans le langage de la théorie des probabilités. Cette première étape de l'étude d'un problème tient plus de la modélisation que des mathématiques et ne pourra pas constituer une part importante de l'évaluation. Néanmoins, il est important de comprendre plusieurs choses à ce sujet : savoir où s'arrête la modélisation et où commence le traitement mathématique du problème, savoir interpréter certains choix faits dans la modélisation (par exemple l'indépendance de variables aléatoires ou le choix d'une certaine loi de probabilité), et savoir interpréter le résultat d'un calcul en revenant au problème de départ. Il convient également de faire la distinction, particulièrement subtile en probabilités, entre le raisonnement intuitif, qui permet souvent d'avoir une idée de la solution à un problème, et le raisonnement rigoureux, qui permet d'arriver à la solution avec certitude.

Raisonnement probabiliste La théorie des probabilités, bien que très proche des théories des séries et des intégrales, possède ses particularités, notamment par ses notations qui sont souvent déroutantes au début, et par certains raisonnements qu'on ne retrouve pas dans les autres matières. Certains points délicats doivent être acquis pour l'examen : distinction entre variable aléatoire, mesure de probabilités, loi de probabilité, utilisation de l'indépendance ou de la disjonction d'événements, distinction entre indépendance et non-corrélation. Ces points précis demandent un travail de relecture du cours qui va au-delà de la compréhension intuitive des probabilités.

Aspects calculatoires Les exercices de probabilités sont assez souvent calculatoires et font appels à des outils introduits dans les UE d'analyse. En probabilités discrètes, il faut savoir montrer qu'une suite de réels décrit une loi de probabilité, puis savoir calculer des espérances par rapport à cette loi avec le théorème de transfert. Ces calculs nécessitent une certaine aisance dans la manipulation des séries à termes positifs. En probabilités continues, il faut savoir mener des calculs similaires : montrer qu'une certaine fonction est une densité de probabilité, calculer des espérances à partir de cette densité, calculer une fonction de répartition. Ces calculs sont basés sur la théorie de l'intégration, dans laquelle il faut se sentir à l'aise.

MODALITÉS D'ORGANISATION

24h de cours, 36h de TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 60 heures
- Cours magistraux: 24 heures
- Travaux dirigés: 36 heures

CODES APOGÉE

- SMI4U18A [ELP]
- SMI4U18L [ELP]
- SMI4U18C [ELP]
- SMI4U18T [ELP]

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

POUR PLUS D'INFORMATIONS

[Aller sur le site de l'offre de formation...]

Dernière modification le 17/07/2024