Licence Mathématiques
Algèbre linéaire 2

Responsables	Descriptions	Informations
Christine VESPA (Responsable de l'UE à Luminy) christine.VESPA@univ-amu.fr Christophe PITTET (Responsable de l'UE à St-Charles) christophe.pittet@univ-amu.fr Christian FAIVRE (Responsable de l'UE à Aix-Montperrin) christian.faivre@univ-amu.fr	Code : SMI4U12 Nature : Unité d'enseignement Domaines : Sciences et Technologies	Composante : Faculté des Sciences

LANGUE(S) D'ENSEIGNEMENT

Français

CONTENU

Programme Partie 1 : Déterminants (2 à 3 semaines)

1. Déterminant de matrices 2×2 et 3×3 : formule dans le premier cas ou développement par rapport à une ligne ou colonne dans le second. Lien avec l'aire des parallélogrammes (à démontrer) et le volume des parallélépipèdes (admis).
2. Déterminant de matrices n×n, cas général (il est important de traiter ce cas après les cas n = 2 et 3).
   - Définition par récurrence (développement par rapport à la première colonne)
   - Propriétés (on peut suivre l'ouvrage de J.-P. Escofier, Toute l'algèbre pour la licence (Dunod 2020)) :
     1. Le déterminant change de signe quand on permute deux colonnes (admis). On en déduit les propriétés qui suivent.
     2. Si deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.
     3. Le déterminant est multilinéaire.
     4. Déterminant de matrices diagonales et diagonales par blocs.
     5. Si n vecteurs sont linéairement indépendants, leur déterminant est nul.
     6. le déterminant de la transposée d'une matrice est égale au déterminant de la matrice (admis).
     7. Développement d'une matrice par rapport à une ligne ou une colonne quelconque.
3. Déterminant d'applications linéaires. Invariance par changement de base.
4. Déterminant d'une famille de vecteur par rapport à une base ; application : orientation (surtout en dim 2 et 3).

Partie 2 : Réduction des endomorphismes (9 à 10 semaines) Dans la suite f désignera toujours un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Rappels du S1 : Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme et d'une matrice ; sous-espaces stables d'un endomorphisme ; sous-espaces propres ; sommes directes.
2. Étude d'exemples élémentaires : symétries, projection et rotation dans le plan ; exemples en dimension 3 ; projections en dimension n quelconque.
3. Polynôme caractéristique ; propriétés, lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristiques, coefficients du polynôme caractéristique.
4. Deux résultats : Si d désigne la restriction d'un endomorphisme f à un sous-espaces stable, le polynôme caractéristique de g divise celui de f ; Si f est nilpotent, alors son polynôme caractéristique vaut $(-1)^n X^n$.
5. Endomorphisme diagonalisable ; Soit f endomorphisme de E. Alors : f est diagonalisable ssi Mat(f)B est diagonale pour B bien choisie ssi E est la somme directe des espaces propres de f ssi la somme des dimension des espaces propres vaut dim(E).
   Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable ; quelques exemples ; multiplicité d'une racine du polynôme caractéristique et lien avec la dimension des espaces propres.
6. Critère de diagonalisabilité : f est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et les multiplicité de ses racines sont égales aux dimension des espaces propres associés.
7. Trigonalisation : définition pour un endomorphisme et pour une matrice ; A est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.
8. Théorème de Cayley-Hamilton (on le démontre en travaillant sur ℂ et en trigonalisant la matrice. Pour une matrice triangulaire supérieure, la preuve se fait aisément).
9. Polynômes d'endomorphismes. Définition de P(f) quand f est un endomorphisme et P un polynôme. Quelques propriétés des polynômes en f. Le morphisme $\mathbb{C}[X] \dashrightarrow \mathbb{C}[f]$ qui envoie P sur P(f) est essentiel, mais on n'a pas les outils pour le traiter maintenant, donc on en parle pas. Par contre on peut définir la notion de polynôme annulateur, et montrer qu'il en existe un unique de plus petit degré à l'aide de la division euclidienne. Le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas au programme (ce sera au programme de la L3).
10. Applications : équations différentielles linéaires à coefficients constants, et suites définies par récurrences linéaires à coefficients constants.

COMPÉTENCES À ACQUÉRIR

Connaissances du cours
Les définitions, exemples et énoncés doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant légèrement différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).

Les démonstrations sont toutes à comprendre. Il faut savoir les restituer sauf les suivantes : les critères de diagonalisabilité et triogonalisabilité, le théorème de Cayley-Hamilton (mais cela sera précisé par l'enseignant).

Compétences

Aspects calculatoires Il faut savoir calculer sans difficulté un déterminant ou un polynôme caractéristique d'une matrice de taille 3×3 maximum (cela n'empêche pas de savoir calculer un déterminant particulier de taille plus grande).
Lorsque les racines du polynôme caractéristique sont connues il faut savoir calculer les espaces propres associés (on se limitera à des valeurs propres rationnelles et à quelques autres exemples simples (par exemple imaginaire pures). Il faut savoir reconnaître une matrice non-diagonalisable quand le polynôme caractéristique est scindé.

Raisonnement Les remarques faites dans l'UE d'algèbre linéaire 1 du S3 s'appliquent aussi à la présente. Celle-ci sera aussi l'occasion de confirmer la bonne acquisition des notions vues dans l'UE Algèbre linéaire 1 (en particulier famille libre, famille génératrice, somme directe, dimension), ainsi que dans l'UE de polynômes.

Voici quelques exemples de questions que les étudiants devraient savoir traiter (et qui permettent de situer le niveau attendu) :

1. Calculer . Montrer que c'est égal à $P(1)P(j)P(j^2)$ où $P(X) = a+bX+cX^2$.
2. On considère l'application linéaire f donnée par
   1. Calculer f^2 et en déduire que f est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.
   2. Montrer qu'une base de M2(ℝ) est donnée par les quatre matrices
   3. Écrire la matrice de l'application linéaire dans cette base.
3. Soit E = ℝn[X]. On considère l'application Φ : E →E définie par
   1. Montrer que Φ est bien définie et est une application linéaire.
   2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique.
   3. Montrer que Φ est diagonalisable.
4. Si A et B sont deux matrices carrées de même taille, montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres.

MODALITÉS D'ORGANISATION

36h de cours, 54h de TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 90 heures
- Cours magistraux: 36 heures
- Travaux dirigés: 54 heures

CODES APOGÉE

- Aucune valeur définie.

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

POUR PLUS D'INFORMATIONS

[Aller sur le site de l'offre de formation...]