Licence Mathématiques
Suites et fonctions d'une variable réelle

Responsables	Descriptions	Informations
Richard ZEKRI (Responsable de l'UE à Luminy) richard.zekri@univ-amu.fr Emmanuel RUSS (Responsable de l'UE à St-Charles) emmanuel.RUSS@univ-amu.fr Stephane CHARPENTIER (Responsable de l'UE à Aix-Montperrin) stephane.charpentier.1@univ-amu.fr	Code : SMI3U11 Nature : Unité d'enseignement Domaines : Sciences et Technologies	Composante : Faculté des Sciences

Langue(s) d'enseignement

Français

Contenu

1. Propriétés de ℝ : 1 semaine (3h CM, 6h TD) :
    - Rappels sur la définition du maximum et du minimum d'un ensemble.
      Les notions de min et max ont été étudiées en détails en S1 Descartes. Il ne s'agit là que de rappels qui peuvent également être donnés sous forme de fascicule si besoin.
    - Borne supérieure, Borne inférieure : Définition comme "le plus petit des majorants" et caractérisation avec les assertions, lien borne sup et max, borne inf et min. Existence pour les ensembles non vides bornés de ℝ. Caractérisation de la borne supérieure avec des ϵ.
      L'existence des bornes sup et inf est pris comme axiome. La définition d'une borne sup/inf pour un ensemble ordonné quelconque a été introduite au S2 Descartes dans l'UE Arithmétique et Raisonnement mais très peu d'exercices ont été faits. Les suites ont été vues au S2 Descartes dans l'UE Suites, systèmes linéaires et intégration sous la forme du calculus et peuvent donc être utilisées ici.
    - ℝ est archimédien : démonstration à l'aide des bornes sup et inf.
    - Densité de ℚ dans ℝ : Interprétation de |x-x0|<ε en terme de distance entre deux nombres sur la droite réelle, définition de la densité d'un ensemble dans un sous-ensemble de ℝ avec approximation à ε près, intersection avec un intervalle ouvert non vide et caractérisation séquentielle. Densité de ℚ et de ℝ\ℚ dans ℝ.
2. Suites : 3 semaines (9h CM, 12h TD)
   Attention, les suites ont été traitées au S2 Descartes sous leur aspect calculatoire.
    - Définition d'une suite, d'une suite monotone, bornée, tronquée, stationnaire.
    - Définition de la limite : Définition d'une suite convergente ou divergente. Limites finies et infinies. Unicité de la limite.
    - Propriété : toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques sur les limites. Caractérisation séquentielle de la borne sup : "a = supA ssi a majorant et il existe une suite de A qui tend vers a". "Toute suite croissante majorée est convergente". Les suites adjacentes. Application au théorème des segments emboîtés.
      Ces définitions et premières propriétés ont été déjà vues au S2 dans l'UE Suites, systèmes linéaires et intégration sous l'aspect plus calculatoire. Ici, il s'agit de passer rapidement sur le cours et d'insister en exo sur les démonstrations des propriétés simples avec les ε.
    - Limite et inégalité : "Si (un) converge vers ℓ > k, alors un ≥k à partir d'un certain rang". Théorème des gendarmes, théorème de passage à la limite. Application : Si (un) ∈[a,b] converge vers ℓ, alors ℓ ∈[a,b].
      Ces notions auront été survolées au S2 Descartes dans l'UE Suite, systèmes linéaires et intégration. Ici, il est important d'insister sur cette partie et sur tous les exercices qui font appel à ces propriétés jusqu'à ce que les étudiants acquièrent des réflexes sur la manipulation des limites avec les inégalités.
    - Suites extraites : Définition, exemple avec (un)n≥n0, (u2n) et (u2n+1). Définition d'une valeur d'adhérence. "Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente". Utilisation pour montrer qu'une suite est divergente. Idem pour des suites qui tendent vers ±∞.
      La notion de suite extraite est difficile pour les étudiants, mais c'est une notion qui doit être maîtrisée à la fin de cette UE. Il faudra donc faire beaucoup d'exercices variés sur le sujet.
    - Théorème de Bolzano-Weierstrass, démonstration par les segments emboîtés.
    - Relation de négligeabilité, d'équivalence et de domination. On introduira les notations o(un) et εnun et on donnera les définitions pour des suites qui peuvent s'annuler. Comparaison de suites usuelles : logarithme, puissance, exponentielle et factorielle.
      Les étudiants doivent connaître ces notations mais la notion permettra surtout de "refaire" de nombreux exercices sur les limites. Les résultats du cours doivent rester très basiques et ne pas prendre trop de temps.
    - S'il reste du temps : Extension des définitions aux suites de ℂ et éventuellement quelques exercices sur le sujet.
3. Fonctions continues : 4 semaines (12h CM, 18h TD)
    - Définition du voisinage d'un point, de l'infini. Définition d'un ouvert de ℝ. Adhérence d'une partie de ℝ.
      L'introduction de ces notions permet de raccourcir plusieurs énoncés mais aucun exercice centré sur ces notions ne sera proposé à ce semestre.
    - Définition d'une limite en un point ou à l'infini. Limite à droite et limite à gauche. Unicité de la limite. "limaf > k ⇒f > k au voisinage de a".
      On pourra introduire la notation ℝ pour ℝ ∪{+∞,-∞}mais en faisant attention à ne pas mélanger avec la notion d'adhérence.
    - Caractérisation de la limite d'une fonction à l'aide des suites. Opérations algébriques sur les limites, théorème des gendarmes, passage à la limite avec des inégalités larges, théorème de la limite monotone, limites de fonctions composées.
      Les propriétés ci-dessus peuvent être démontrées

rapidement grâce à la caractérisation par les suites et ces mêmes propriétés pour les suites mais dans ce cas, il est conseillé de faire des démonstration avec les ε en exercice.

- Relation de négligeabilité, relation d'équivalence et relation de domination. Comparaison des fonctions usuelles : puissances, logarithme, exponentielle.

- Fonctions continues : définition et caractérisation séquentielle ; continuité à droite et à gauche. Applications immédiates de la continuité : étude des suites un+1 = f(un) avec f continue et convergence vers un point fixe de f ; "Si f(a) > 0 et f continue, alors f > 0 au voisinage de a".
  On pourra parler de fonctions k-lipschitziennes et de leur continuité en exercice mais la connaissance de la définition n'est pas exigible en examen.

- Opérations algébriques et continuité. Valeur absolue et continuité. Composition et continuité.

- Prolongement par continuité. Application au sinus cardinal. Deux fonctions continues coïncidant sur un ensemble dense sont égales.

- Théorème des valeurs intermédiaires. Démonstration par les segments emboîtés. "L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle".

- Théorème de Weierstrass : "Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes". "L'image d'un segment par une fonction continue est un segment". Application : "Une fonction continue et strictement positive sur un segment est minorée par une constante strictement positive."

- Théorème de la bijection. Contre-exemple si la fonction n'est pas définie sur un intervalle. Application à la définition de la racine et des fonctions trigonométriques réciproques.
  Attention, ces fonctions auront déjà été vues en L1 Descartes mais simplement dans leur aspect calculatoire.

- Eventuellement si le temps le permet : Uniforme continuité : définition. Théorème de Heine.

4. Fonctions dérivables : 4 semaines (12h CM, 18h TD)

   - Définition du taux d'accroissement. Définition de la dérivée en un point d'un intervalle ouvert et de la fonction dérivée comme limite du taux d'accroissement. Notation f′ et . On utilisera la notation f′ dans le reste du cours. Formule de Taylor d'ordre 1 et interprétation géométrique avec la tangente. Dérivée à droite et à gauche. Calcul de la dérivée de fonctions classiques : carré, inverse, racine, sinus, cosinus, exponentielle et logarithme. "Toute fonction dérivable est continue". "Si f est constante (resp. croissante, ...), alors f′ est nulle (resp. positive, ...)".
     Attention, ces notions ont été traitées au S1 Descartes dans l'UE Étude de fonction et nombres complexes.

   - Opérations algébriques et dérivée. Dérivée d'un monôme. Formule de la dérivée d'une composée. Dérivée d'une bijection réciproque. Dérivée des fonctions puissance (puissances réelles).
     Attention, ces notions ont généralement été traitées au S1 Descartes dans l'UE Étude de fonction et nombres complexes sauf la dérivée d'une bijection réciproque.

   - Dérivées successives. Formule de Leibniz. Définition des classes de fonctions ^{k}(I). Stabilité par opérations algébriques et composée.

   - Définition d'un extremum local et global. Annulation de la dérivée en un extremum local. Lien dérivée seconde et extrema locaux. Exemples de recherche d'extrema locaux.
     Attention, la notion d'extrema global a été traitée au S1 Descartes dans l'UE Étude de fonction et nombres complexes, mais pas la notion d'extrema local ni le lien avec les dérivées secondes.

   - Théorème de Rolle : énoncé, démonstration et contre-exemple si l'une des hypothèses est fausse.

   - Théorème des accroissements finis. Inégalité des accroissement finis. Une fonction à dérivée bornée est lipschitzienne. Théorème sur le signe de la dérivée et la monotonie. Théorème de prolongement [1].

   - Fonction convexe. Définition. Caractérisation des fonctions dérivables convexes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.
     Ce paragraphe sur les fonctions convexes doit être rapide. Le but est de maîtriser la définition et de savoir montrer si une fonction est convexe en dérivant deux fois mais la manipulation des différentes inégalités de pentes sera faite simplement en exercice si besoin.

   - Développements limités. Définition et introduction de l'abréviation DL. Exemple de la fonction . Formules de Taylor-Lagrange et de Taylor-Young. Existence de DL à l'ordre n pour les fonctions ^{n}. Sommes et produits de DL. Composition de DL. Intégration de DL.
     On insistera surtout sur le calcul plus que sur l'énoncé.

   - Extension aux fonctions à valeurs complexes en particulier l'exponentielle ?

Compétences à acquérir

Connaissances du cours Les définitions, exemples et énoncés de propositions et théorèmes doivent tous être connus parfaitement. C'est-à-dire qu'il faut savoir les reconnaître et les restituer, y compris dans des cadres pouvant différer de celui dans lequel ils ont été présentés en cours (notamment un changement de notation pour les objets).

Les démonstrations données en cours sont toutes à comprendre. Elles ne sont cependant pas exigibles.

Compétences

1. Il est important que les étudiants comprennent bien l'équivalence entre les propriétés énoncées pour tout ε > 0 et la construction de suites qui vérifient les propriétés avec ε = 1/n.

2. A la fin du chapitre sur les bornes inf et borne sup, les étudiants doivent être capables de traiter un exercice du type sup(A+B) = sup(A)+sup(B) seul.

3. A la fin du chapitre sur les suites, les étudiants doivent être capables par eux-mêmes de traiter des exercices du type "Si un/un+1 $\to \ell$ > 1, alors un tend vers 0" ou "Si (u2n) et (u2n+1) convergent vers une même limite, alors (un) converge", ou avec éventuellement une question intermédiaire pour les guider.

4. Les étudiants doivent être capables de calculer très rapidement des DL de fonctions simples à de petits ordres. Par exemple, obtenir le DL en 0 et à l'ordre 3 d'une fonction du type ln(1+sin(x)) doit être très rapide. En revanche, il est inutile de savoir calculer des DL à l'ordre 6 ou 7 de fonctions très techniques où les différents termes se compensent et qui n'apparaissent jamais en pratique.

5. Les étudiants doivent être capables de manipuler la définition de limite dans des cas relativement simples. Par exemple, être capable de montrer que, si (un) et (vn) sont deux suites convergentes de limites respectives ℓ et ℓ', alors (2un-vn) converge vers $2\ell-\ell'$. Ou être capable de montrer que si f et g sont deux fonctions définies sur ℝ, continues respectivement en x et f(x), alors g∘f est continue au point x.

6. La manipulation des quantificateurs est un point fondamental à évaluer dans cette UE.

Modalités d'organisation

36h de cours, 54h de TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 90 heures
- Cours magistraux: 36 heures
- Travaux dirigés: 54 heures

Codes Apogée

- SMI3U11A [ELP]
- SMI3U11L [ELP]
- SMI3U11C [ELP]
- SMI3U11T [ELP]

M3C

Aucune donnée M3C trouvée

Pour plus d'informations

[Aller sur le site de l'offre de formation...]

Dernière modification le 17/07/2024