Licence Mathématiques

Algèbre linéaire 1

Informations

Composante : Faculté des Sciences

Responsables

Ctirad KLIMCIK (Responsable de l'UE à Luminy)
Jean RAIMBAULT (Responsable de l'UE à St-Charles)
Karl OELJEKLAUS (Responsable de l'UE à Aix-Montperrin)

Langue(s) d'enseignement

Français

Contenu

1. Espaces vectoriels.
   - Définition d'un espace vectoriel (on travaillera sur ℝ pour l'instant).
   - Exemples : les trois exemples vus en L1 : l'ensemble des suites qui satisfont une relation récurrence linéaire à coefficients constants ; l'ensemble des solutions d'une équations différentielle linéaire à coefficients constants ; l'ensemble des solution d'un système d'équations linéaires.
   - On donnera aussi les quatre familles d'exemples d'espaces vectoriels qui sont à connaître : les espaces $\mathbb{R}^n$ de n-uplets de scalaires ; les espaces ℝd[X] de polynômes de degré inférieur ou égal à d et l'espace des polynômes ℝ[X] ; les espaces F(X,ℝ) de fonctions à valeurs réelles définies sur un ensemble X ; l'espaces F(ℕ,ℝ) des suites à valeurs réelles comme cas particulier du précédent.
   - Sous-espaces vectoriels ; exemples dans chacune des familles ci-dessus.
2. Familles génératrices et familles libres, bases.
   - Familles génératrices.
   - Familles libres.
   - Bases ; bases canoniques des exemples ci-dessus à l'exception des espaces F(X,ℝ) pour lesquels on peut dire qu'on sait montrer l'existence d'une bases mais qu'on ne peut pas en général l'expliciter.
3. Dimension.
   - Espace de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie). Lemme d'échange de Steinitz (admis), preuve de l'invariance du cardinal d'une base en dimension finie. Définition de la dimension d'un espace vectoriel (en dimension finie). Preuve (en dimension finie toujours) du théorème de la base incomplète, du théorème de la base extraite, de l'existence d'une base et donc de la dimension.
   - Dimension des sous-espaces vectoriels.
   - Application : rang d'une famille de vecteurs.
   - Somme de sous-espaces, espaces en somme directe, décomposition en somme directe, supplémentaire ; Famille finie de sous-espaces en somme directe.
4. Équations de sous-espaces vectoriels.
   - Systèmes d'équations linéaires et retour sur la méthode du pivot de Gauss (introduite au S2).
   - Résolution des systèmes d'équations linéaires homogène.
   - Équations linéaires d'un sous-espace vectoriel donné par une famille génératrice.
   - Le rang d'une famille de vecteurs colonnes et le rang d'un système d'équations linéaires.
5. Applications linéaires.
   - Définition et premières propriétés.
   - Noyau et image d'une application linéaire.
   - Preuve du Théorème du rang. (Espace de départ de dimension finie). Application à la caractérisation des isomorphismes entre 2 espaces vectoriels de même dimension.
   - Composition d'applications linéaires.
   - Quelques applications linéaires fondamentales : homothéties, projections, symétries. Sous-espaces invariants pour ces applications.
   - Des exemples provenant de la géométrie : matrices de rotation en dimension 2 (la notion rigoureuse d'angle et celle d'isométrie sont complètement hors-programme) et matrices de symétrie.
6. Matrices et applications linéaires.
   - Retour sur les matrices à coefficients dans ℝ ; produit matriciel.
   - Transposition ; transposition d'un produit.
   - Représentation des applications linéaires par des matrices ; Matrice associée et coordonnées d'un vecteur ; Matrices associées et composition des applications linéaires.
   - Changement de base pour les applications linéaires ; reprise des exemples fondamentaux en terme de matrice et de changements de bases tenant compte des sous-espaces invariants.
   - Matrices inversibles ; inverse d'un produit ; calcul de l'inverse.
   - Le sous-ensemble GL(n,ℝ) de Mn,n(ℝ) ; Matrices semblables.
   - Opérations dans L(E,F), traduction en terme de matrices via l'isomorphisme entre L(E,F) etMn,p(ℝ) associé à une paire de bases
   - Vocabulaire de la réduction : valeurs et vecteurs propres. Définition de diagonalisabilité pour les matrices et pour les endomorphismes. Exemples.
7. On pourra mentionner que toute la théorie reste valable si on remplace ℝ par un corps, comme (par exemple) ℚ ou ℂ. Les seules conditions nécessaires sont d'avoir une addition et une multiplication qui ont les mêmes propriétés que sur ℝ : commutativité ; tous les éléments ont un inverse pour + ; tous les éléments non nuls ont un inverse pour × ; associativité et distributivité.

Compétences à acquérir

Aspects calculatoires L'algorithme du pivot de Gauss doit être parfaitement maîtrisé, de même que son application aux problèmes fondamentaux de l'algèbre linéaire : en particulier (mais cette liste n'est pas exhaustive) tester la liberté d'une famille de vecteurs, donner une base (ou de manière équivalente une paramétrisation) d'un sous-espace vectoriel décrit par un système d'équations et réciproquement, vérifier l'inversibilité d'une matrice et en calculer l'inverse.

Le lien entre systèmes linéaires et droites ou plans doit être compris par les étudiants.

Il faut aussi savoir effectuer un changement de base.

Raisonnement Cette UE est une occasion de mettre en pratique dans un cadre nouveau les capacités de raisonnement abstrait acquises dans l'UE "Arithmétique et raisonnement" du portail Descartes.

En particulier il faut savoir appliquer les opérations sur les ensembles aux sous-espaces vectoriels et aux applications linéaires, par exemple on peut demander de rédiger une démonstration rigoureuse du fait que $f(\ker(g\circ f)) = \ker(g)\cap \mathrm{Im}(f)$; ou bien donner et démontrer une inégalité reliant les rangs de deux applications linéaires f et g quand $f\circ g = 0$.

Les étudiants doivent aussi être capables de résoudre des problèmes plus complexes, en plusieurs étapes, dans le cadre d'un exercice comportant plusieurs questions.

Voici une liste d'exemples de questions que les étudiants devraient savoir traiter :

1. Savoir calculer un produit de deux matrices de taille $\leq 3\times 3$ avec des coefficients numériques.
2. Si $A^2 = A+2Id$, montrer que A est inversible et trouver son inverse.
3. Donner la matrice (dans les bases canoniques) d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dont l'image est engendrée par deux vecteurs donnés.
4. Donner une application linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x+2y+3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires telles que $g\circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$.
6. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Supposons que $\ker f^{k+1} = \ker f^k$ pour un certain entier $k \geq 1$. Montrer que, pour tout $n \geq k$, $\ker f^{n+1} = \ker f^k$.
7. Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tels que $f\circ f = f$.
   1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f)+\ker(f)$ (indication : pour $x \in E$, considérer la décomposition $x = f(x)-f(x)+x$).
   2. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f)\oplus\ker(f)$.
8. Soient $A \in M3,2(\mathbb{R}), B \in M2,2(\mathbb{R}), C \in M2,3(\mathbb{R})$. On suppose que ABC = . Trouver x.
9. On considère l'application $f : \mathbb{R}2[X]\mathbb{R}^3$ définie par f(P) = . On note = $(1,X,X^2)$ la base de $\mathbb{R}$ 2[X] et β′ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   1. Donner la matrice Mβ,β′(f) de f dans ces deux bases.
   2. Déterminer le noyau de f.
   3. Montrer que la famille $\beta'' = (-3X^2 +1, 3X^2, -X^2 +X)$ est une base de $\mathbb{R}2[X]$.
   4. Trouver la matrice Mβ′′,β′(f).
10. Montrer que l'application $M \in Mn(\mathbb{R})$ ${}^tM + M \in Mn(\mathbb{R})$ est linéaire. Trouver son noyau et son image.

Modalités d'organisation

36 h de cours, 54 h de TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 90 heures
- Cours magistraux: 36 heures
- Travaux dirigés: 54 heures

Codes Apogée

- SMI3U09A [ELP]
- SMI3U09L [ELP]
- SMI3U09C [ELP]
- SMI3U09T [ELP]

Pour plus d'informations

[Aller sur le site de l'offre de formation...]

Dernière modification le 17/07/2024