

## Licence Informatique

### Structures algébriques

#### Informations

Composante : Faculté des Sciences

#### Langue(s) d'enseignement

Français

#### Contenu

1. Anneaux (2 semaines) :
  1. Définition d'un anneau, sous-anneau ; exemples.
  2. Inversibilité, diviseur de zéro ; anneau intègre, corps.
  3. Morphisme d'anneaux.
  4. Idéal (à partir de maintenant on se restreint aux cas des anneaux commutatifs unitaires) ; idéal engendré par une partie ; anneaux principaux.
2. Quotients d'anneaux (3 semaines) :
  1. Relation d'équivalence en général ; espace quotient. Exemples.
  2. Relation d'équivalence induite par un idéal ; anneau quotient.
  3. Premier théorème d'isomorphisme.
3. Polynômes (3 semaines) :
  1. Anneau des polynômes sur un anneau commutatif unitaire  $A$  ; exemple anneau  $K[X_1, \dots, X_n]$  ; division euclidienne par un polynôme unitaire dans  $A[X]$ .
  2.  $K[X]$  est principal.
  3. Exemples de quotient d'anneaux de polynômes, et utilisation de la division euclidienne pour se représenter un quotient  $K[X]/(P)$  où  $P$  est un polynôme.
  4.  $K[X]/(P)$  est un corps ssi  $P$  est irréductible ; exemples
4. Polynômes d'endomorphismes linéaires (3 semaines) :
  1. On considère ici un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$ , et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Pour  $P \in K[X]$ , on définit  $P(f)$ . Si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , alors  $\lambda$  est racine de tout polynôme annulateur de  $f$ .
  2. Lemme des noyaux ; exemples des projections, symétries ;  $f$  est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur de  $f$  scindé à racines simples.
  3. L'application  $\Psi : K[X] \rightarrow K[f]$ , définie par  $\Psi(P) = P(f)$ , est un morphisme d'anneaux et un morphisme d'espaces vectoriels. On en déduit l'existence d'un polynôme minimal ; les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres de  $f$  ; exemples
5. Quotients de groupes (1 semaine)
  1. Relations d'équivalence sur un groupe  $G$  induite par un sous-groupe  $H$  : classe à droite et classes à gauche. Exemples montrant que  $gH \neq Hg$  en général.
  2. Sous-groupes distingués ; relation de groupe sur  $G/H$  si  $H$  est distingué dans  $G$ .
  3. Premier théorème d'isomorphisme.
  4. Quelques exemples (espaces vectoriels et groupes cycliques, par exemple).

#### Compétences à acquérir

**Connaissances du cours** La partie importante de ce cours concerne les anneaux, dont les anneaux de polynômes. L'utilisation de ces notions pour l'étude des polynômes d'endomorphismes est aussi importante. La partie sur les groupes quotient est informative et permet de faire le parallèle avec les anneaux quotients. Les étudiants auront vu la notion de sous-groupe distingué et de groupe quotient, mais on n'exigera pas une maîtrise poussée de ces notions dans les exercices.

La partie sur les polynômes n'a pas pour objectif de reprendre l'arithmétique des polynômes en détail (qui a été vue en L2), mais surtout de montrer comment se faire des représentations des quotients d'anneaux de polynômes. Néanmoins on fera des rappels sur l'arithmétique des polynômes.

L'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  seront étudiés en TD, en particulier l'ensemble de ses inversible, ainsi que le théorème des restes chinois.

**Compétences** Il faut tout d'abord être capable de vérifier les définitions et d'appliquer les énoncés du cours dans des cas simples. À ce niveau, les étudiants connaissent plusieurs structures algébriques : les espaces vectoriels, les groupes, les anneaux. Il faut bien comprendre les différences entre elles, en particulier sur des exemples. Il est essentiel de comprendre comment ces différentes structures permettent de montrer l'existence du polynôme minimal d'un endomorphisme via le morphisme  $\Psi : K[X] \rightarrow K[f]$ .

#### Modalités d'organisation

24h cours, 36h TD

#### VOLUME HORAIRE

- Volume total: 60 heures
- Cours magistraux: 24 heures
- Travaux dirigés: 36 heures

#### Codes Apogée

- SMI6U27L [ELP]

#### Pour plus d'informations

[Aller sur le site de l'offre de formation...](#)



Dernière modification le 27/11/2024