Licence Informatique
Suites et séries de fonctions

Informations

Composante : Faculté des Sciences

Langue(s) d'enseignement

Français

Contenu

1. Suites et séries de fonctions : 5 semaines (16h CM, 24h TD).
    - Premiers exemples de suites de fonctions. Convergence simple.

      Afin d'introduire et de motiver la suite du cours, avant toute formalisation, il est important de détailler des exemples de suites de fonctions qui convergent simplement (mais pas uniformément) et de montrer que certaines propriétés des termes de la suite de fonctions ne sont donc pas conservées pour la limite (fonctions bornées, limite en un point ou en l'infini, continuité, valeur de l'intégrale, ...). Ces exemples pourront être repris tout au long du cours.
    - Convergence uniforme. Exemples et contre-exemples, notamment (tt^n) sur [0,1]. La convergence uniforme implique la convergence simple. Contre-exemple pour l'implication inverse.
    - Convergence uniforme et continuité. Exemple de fonction convergeant uniformément sur tout intervalle [a,+∞[avec a>0 mais ne convergeant pas uniformément sur]0,+∞[et application à la continuité de la limite de ces fonctions sur]0,+∞[.
    - Théorème d'interversion de limites en un point adhérent à l'ensemble de définition.

      La notion d'adhérence d'un ensemble de ℝ a été introduite dans l'UE "Suites et fonctions d'une variable réelle" du S3 mais pourra être rappelée.
    - Convergence uniforme et intégration sur un segment [a,b] pour une suite de fonctions continues. Convergence et primitive.
    - Suite de fonctions et dérivation.

      On énoncera aussi explicitement les corollaires pour les suites de fonctions de classe C^k.
    - Séries de fonctions. Convergence simple. Convergence absolue. Convergence uniforme. Exemples pour montrer que ces notions ne sont pas équivalentes.
    - Convergence normale. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue. Contre-exemple pour l'implication inverse.
    - Continuité, dérivation, intégration d'une série de fonctions.

      Les théorèmes seront précisément énoncés dan le cadre des séries même si les démonstrations découlent immédiatement des résultats sur les suites de fonctions.
    - Exemples à détailler : fonction zêta ; ∑ et vérifier qu'on retrouve l'exponentielle réelle.
      Au S1 dans l'UE "Mathématiques générales", l'exponentielle a été définie comme l'unique fonction dérivable telle que f′= f avec f(0) = 1.
2. Convergence dans un espace vectoriel normé : 1,5 semaines (4h CM, 6h TD)
    - Définition d'une norme sur un espace vectoriel. Exemple du module sur ℂ. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur $ℝ^n$. Exemples des normes de matrices ou des normes d'applications linéaires. Définition de la norme 1, 2 et ∞ sur l'ensemble des fonctions continues sur [a,b].
    - Définition de la convergence d'une suite d'un evn à l'aide des normes. Théorème sur l'équivalence des normes en dimension finie (admis). Équivalence avec la convergence coordonnée par coordonnée dans un evn de dimension finie.
      Le théorème sur l'équivalence des normes sera démontré dans l'UE de "Topologie" du S6.
    - Équivalence entre convergence uniforme et convergence pour la norme infinie dans l'espace des fonctions bornées. Définition de la convergence en norme quadratique ou en norme 1 pour des fonctions continues sur [a,b]. Démonstration que toutes ces normes ne sont pas équivalentes.
3. Séries entières : 4 semaines (12h CM, 18h TD)
    - Rappels sur la convergence des sommes dans ℂ. Définition des séries entières comme série numériques dans ℂ.
    - Lemme d'Abel [2] . Définition du rayon de convergence et du disque de convergence. Convergence ou divergence dans le disque ou à l'extérieur. Exemples de comportements variés pour |z|= R.
    - Critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence. Exemple d'un cas où ça ne s'applique pas directement, $\sum z^{2n}$.
    - Comparaison des rayons de convergence de deux séries $\sum anz^n$ et $\sum bnz^n$ avec an ≤bn. Comparaison des rayons de convergence pour $\sum anz^n$ et $\sum nanz^{n-1}$.
    - Définition du produit de Cauchy de deux séries entières. Comportement du rayon de convergence par somme et produit.
    - Étude de fonctions de ℝ dans ℝ définies comme la somme d'une série entière (donc vue comme une série de fonctions). Ensemble de définition pour de telles fonctions (ie ensemble de ℝ où la série converge) et lien avec l'intervalle de convergence (ie le disque de convergence dans ℝ,]-R,R[). Convergence normale sur tout segment [a,b] inclus dans l'intervalle de convergence.
    - Régularité de la somme de la série entière : continuité, dérivation et intégration terme à terme sur l'intervalle de convergence.
    - Théorème d'Abel [3] . Continuité de la fonction somme d'une série entière sur son ensemble de définition.

      La transformation d'Abel pourra être utilisée dans la démonstration du théorème d'Abel mais cette formule n'est pas à connaître pour les étudiants.
    - Développement en série entière d'une fonction de ℝ dans ℝ. Combinaison linéaire, produit, dérivée et primitive de fonctions développables en série entière.

      On se contentera de définir les développements en série entière centrés en 0.
    - Série de Taylor et développement en série entière. Liens entre parité et coefficients.
    - Développement en série entière de fonctions usuelles : , ln(1 + x), arctan(x), exp(x), cos(x), sin(x), $(1+x)^{\alpha}$. Exemples d'utilisation pour le calcul de somme.
    - En fonction du temps disponible : définition de l'exponentielle complexe via sa série entière. Propriétés.
4. Introduction aux séries de Fourier : 1,5 semaines (4h CM, 6h TD).
    - Définition d'une fonction périodique, définition d'une fonction périodique continue par morceaux. La dérivée d'une fonction T -périodique est T -périodique. Contre-exemple pour une primitive. Si f est T -périodique et continue par

morceaux, $\int_0^T f = \int_a^{a+T} f$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Dans cette partie, on mettra en évidence comment transformer une fonction T -périodique en une fonction 2π-périodique car dans la suite, les théorèmes ne seront énoncés que pour les fonctions 2π-périodiques.

- Définition du noyau de Dirichlet tDn(t). Valeur moyenne. Expression comme quotient de sinus, et décroissance uniforme loin de $2\pi\mathbb{Z}$.
- Produit de convolution Dn *f pour une fonction f continue. Définition du coefficient de Fourier cn(f) puis expression de Dn*f comme polynôme trigonométrique.
- Théorème de Dirichlet pour $f \in {}^0 \cap pm^1$. Exemple des fonctions triangles.
- Théorème de Dirichlet dans le cas $f \in pm^1$. Exemple des fonctions créneaux.
- Application au calcul de sommes.

Compétences à acquérir

Connaissances du cours

- Attention, la notion de norme pour un espace euclidien en dimension finie sera introduite en parallèle de cette UE dans l'UE "Algèbre bilinéaire".
- Les notions de base de topologie et en particulier, la convergence des suites d'un evn et l'équivalence des normes en dimension finie ne seront étudiées en détails qu'au semestre suivant dans l'UE de topologie. Dans cette UE, on se contentera de mettre en évidence les différences entre la dimension finie et la dimension infinie.
- Attention, les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou la convergence des suites de $\mathbb{C}$ n'auront été abordées dans l'UE "Suite et fonctions" du S3 que "s'il reste du temps". Il est donc important de revenir sur ces notions quand on veut les utiliser.
- Les définitions, proposition et théorème du cours doivent être parfaitement maîtrisés. Les exemples du cours doivent être bien compris et revenir facilement en mémoire pour servir de contre-exemple si besoin.
- Le chapitre sur les séries de Fourier peut ne pas être abordé, ou bien être abordé comme de la culture générale si le temps manque. Si le chapitre est abordé, on se concentrera sur le lien avec les notions vues dans le cours sur la convergence simple, uniforme ou normale mais on n'abordera pas la théorie L^2 difficile à comprendre réellement sans les espaces de Hilbert.

Compétences

1. À l'issue du cours, les étudiants savent comment prouver la convergence (simple ou uniforme) d'une suite de fonction. Ils savent comment prouver la convergence normale d'une série de fonctions.
2. Ils savent également prouver qu'une limite d'une suite de fonctions ou la somme d'une série de fonctions est continue (ou dérivable), ou ils savent en calculer l'intégrale. Dans le cas où la convergence uniforme n'est vérifiée que pour des sous-domaines du type $[a,+\infty[$ ou $[0,a]$ pour tout $a > 0$ (à préciser dans l'énoncé de l'exercice pour guider les étudiants), les étudiants sont capables de montrer la continuité de la fonction limite.
3. Ils savent calculer le rayon d'une série entière simple. Ils connaissent les propriétés des fonctions définies par une série entière sur leur ensemble de définition.
4. Ils savent retrouver le développement en série entière (DSE) d'une fonction usuelle. Si on les guide, il savent calculer le DSE d'une fonction réciproque ou inverse. Si on leur demande de repérer une symétrie de la fonction, ils savent utiliser cette symétrie pour simplifier le calcul de son DSE.
5. Les étudiants sont capables de calculer la limite de certaines séries en utilisant le développement en série entière et si besoin le théorème d'Abel, mais dans ce cas ils sont guidés par l'énoncé.

Modalités d'organisation

36h cours, 54h TD

VOLUME HORAIRE

- Volume total: 90 heures
- Cours magistraux: 36 heures
- Travaux dirigés: 54 heures

Codes Apogée

- SMI5U21L [ELP]

Pour plus d'informations

[Aller sur le site de l'offre de formation...]

Dernière modification le 27/11/2024